Teorema 1.7. Neka je $f : X \to [0,\infty]$ merljiva funkcija na $(X,\mathcal{M})$. Tada postoji niz nenegativnih jednostavnih merljivih funkcija $\{s_n : n \in \mathbf{N}\}$ na X tako da važi

$$s_n(x) \leq s_{n+1}(x),\ x \in X, n \in \mathbf{N},\ \lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x), x \in X.$$

Dokaz: Neka $i, n \in \mathbf{N}$ i $1 \leq i \leq n \cdot 2^n$. Definišemo

$$E_{n,i} := f^{-1}([\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n})),\ F_n = f^{-1}([n,\infty]).$$

Skupovi $E_{n,i} \subseteq X$ $i = 1, ..., n \cdot 2^n$, F_n su elementi $\sigma-$algebre $\mathcal{M}$ jer su inverzne slike intervala. Definišimo

$$s_n(x) := \sum_{i=1}^{n\cdot 2^n} \frac{i-1}{2^n}\kappa_{E_{n,i}}(x) + n \cdot \kappa_{F_n}(x),\ x \in X.$$

Za svako $n \in \mathbf{N}$ funkcija s_n je nenegativna i ima konačno mnogo vrednosti. Jednostavno se pokazuje da su skupovi $E_{n,i}$ $i = 1, ..., n2^n$ i F_n disjunktni jer važi

$$f(E_{n,i}) \subseteq \left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right),\ i = 1, ..., n2^n,\ \ f(F_n) \subseteq [n,\infty].$$

Takođe važi

$$f(x) - \frac{i-1}{2^n}\kappa_{E_{n,i}}(x) \leq \frac{1}{2^n} \ \text{ za } \ x \in E_{n,i}.$$

Ako $x \in X$ i $f(x) \in [0, n_0)$, za neko $n_0 \in \mathbf{N}$, tada $f(x) \in [0, n)$ za svako $n \geq n_0$, te je

$$f(x) - s_n(x) < \frac{1}{2^n} \text{ odnosno } \lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x).$$

Ako je $f(x) = \infty$, tada je $s_n(x) = n$, $n \in \mathbf{N}$, te $s_n(x) \to f(x)$, $n \to \infty$.

Dokažimo da je niz $s_n, n \in \mathbf{N}$, monotono neopadajući. Ako za $x \in X$ važi $f(x) = \infty$, to je očigledno.

Pretpostavimo da je $f(x) < \infty$. Neka $x \in E_{n,i_0}$. Važi $s_n(x) = \frac{i_0-1}{2^n}$. Odredimo $s_{n+1}(x)$. Kako je

$$\left[\frac{i_0-1}{2^n}, \frac{i_0}{2^n}\right) = \left[\frac{2i_0-2}{2^{n+1}}, \frac{2i_0-1}{2^{n+1}}\right) \bigcup \left[\frac{2i_0-1}{2^{n+1}}, \frac{2i_0}{2^{n+1}}\right)$$

sledi da $x \in E_{n+1,2i_0-1}$ ili $x \in E_{n+1,2i_0}$ tj.

$$x \in f^{-1}([\frac{2(i_0-1)}{2^{n+1}}, \frac{2i_0-1}{2^{n+1}})) \text{ ili } x \in f^{-1}([\frac{2i_0-1}{2^{n+1}}, \frac{2i_0}{2^{n+1}})),$$

te je

$$s_{n+1}(x) = \frac{2(i_0-1)}{2^{n+1}} \text{ ili } s_{n+1}(x) = \frac{2i_0-1}{2^{n+1}}.$$